CURVE

$\varphi : I \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t) = (\underbrace{\varphi_1(t), \varphi_2(t)}_{\text{COMPONENTI}})$ è una curva se I è un intervallo $\underline{\underline{e}}$ $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono continue. Attenzione in quelle definite a tratti.

- CURVA CHIUSA $\to$ $I = [a,b]$ e $\varphi(a) = \varphi(b)$
- SOSTEGNO DELLA CURVA $\to$ $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$ è l'immagine della funzione (grafico).
- CURVA SEMPLICE $\to$ $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ $\forall t_1, t_2 \in I : t_1 \neq t_2$ e $t_1, t_2 \in]a,b[$. In pratica la curva non ha nodi; basta che una delle componenti sia iniettiva
- CURVA DERIVABILE $\to$ in un punto t_0 se φ_1 e φ_2 sono derivabili in t_0.
- CURVA DI CLASSE C^1 $\to$ se le derivate delle sue componenti sono continue
- CURVA REGOLARE $\to$ $\varphi'(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in I$
- CURVA REGOLARE A TRATTI $\to$ $\varphi'(t) \neq (0,0)$ tranne in un insieme finito di punti

Per disegnare il sostegno, cerco di esprimere una delle due componenti in funzione dell'altra. Esempio:

$\varphi(t) = (t, t^2)$ il sostegno sta su $y = x^2$

Per stabilire se una curva è regolare, calcolo la derivata prima, la pongo uguale a 0 e conto quante soluzioni ha il sistema. Esempio:

$\varphi'(t) = (1, 2t)$ $\begin{cases} 1 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$ IMPOSSIBILE $\Rightarrow \varphi(t)$ è regolare.

CURVE EQUIVALENTI $\to$ due curve $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ e $\psi : J \to \mathbb{R}^2$ aventi lo stesso sostegno S tali per cui esiste una funzione $g : I \to J$ biettiva, di classe C^1 con derivata sempre diversa da 0 in I tale che $\varphi(t) = \psi(g(t))$ $\forall t \in I$.

Per trovare una curva che stia su un sostegno dato (es. $y = e^x + 1$), considero la prima componente uguale a t e la seconda uguale all'equazione del sostegno con t al posto di x: $\varphi = (t, e^t + 1)$.

Se al posto di t prendo $2t$, la velocità aumenta; se prendo $\frac{t}{2}$, la velocità diminuisce.

VETTORE TANGENTE IN t_0 $\to$ se esiste, è $\varphi'(t_0)$

Se $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ $\forall t \neq t_0$ (iniettività), la retta $(x,y) = \varphi(t_0) + t\varphi'(t_0)$ è detta RETTA TANGENTE a φ in t_0.

Il vettore tangente indica la direzione della retta tangente e il verso di percorrenza della curva.

Un altro modo per stabilire il verso di percorrenza sta nel calcolarsi i valori della curva per alcuni t.

PARAMETRIZZAZIONI DA RICORDARE

$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ circonferenza centrata in $(0,0)$ di raggio R.

$\begin{cases} x = x_C + R\cos t \\ y = y_C + R\,\text{sen}\,t \end{cases}$ circonferenza centrata in (x_C, y_C) di raggio R. $t \in [0, 2\pi]$

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ ellisse centrata in $(0,0)$ che interseca l'asse x in a e l'asse y in b

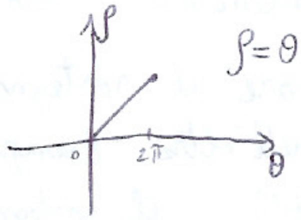
$\begin{cases} x = x_C + a\cos t \\ y = y_C + b\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ ellisse centrata in (x_C, y_C)

$\begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ retta

$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$ $t \in [0,1]$ segmento di retta da $A(x_A, y_A)$ a $B(x_B, y_B)$.

COORDINATE POLARI

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x}$ $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$



VERSORE TANGENTE → esiste solo se la curva è regolare e ha equazione

$$T = \left(\frac{\varphi_1'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, \frac{\varphi_2'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right) \quad \text{con } |\varphi'(t_0)| = \sqrt{[\varphi_1'(t_0)]^2 + [\varphi_2'(t_0)]^2}$$

VERSORE NORMALE → ne esistono due, uno che punta verso l'esterno e uno che punta verso l'interno. Noi consideriamo quello esterno, che ha equazione:

$$N = \left(\frac{\varphi_2'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|}, -\frac{\varphi_1'(t_0)}{|\varphi'(t_0)|} \right)$$ T e N sono ortogonali

TEOREMA DI RETTIFICABILITÀ

Data $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1, allora

1) $\mathcal{L}(\varphi) < +\infty$
2) $\mathcal{L}(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt$

La lunghezza della curva non cambia nel caso di curve equivalenti ed è indipendente dal verso di percorrenza scelto.

ASCISSA CURVILINEA

$$s(t) = \int_a^t |\varphi'(\sigma)|\,d\sigma$$

INTEGRALE CURVILINEO → dato una curva $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ di classe C^1 con sostegno $\varphi([a,b])$ e una funzione $f:\varphi([a,b])\to\mathbb{R}$ continua, definiamo

$$\int_\varphi f\,ds=\int_a^b f(\varphi(t))\cdot|\varphi'(t)|\,dt$$ integrale curvilineo di f su φ.

$f(\varphi(t))$ si calcola sostituendo alla x di f la prima componente di $\varphi(t)$ e alla y di f la seconda componente di $\varphi(t)$.

BARICENTRO

$$x_B=\frac{\int_\varphi x\cdot f\,ds}{\int_\varphi f\cdot ds}\qquad y_B=\frac{\int_\varphi y\cdot f\,ds}{\int_\varphi f\cdot ds}$$

coordinate del baricentro di φ relativo alla densità di massa f. Se $f=1$, si parla di BARICENTRO GEOMETRICO e il denominatore diventa la lunghezza di φ.

$x\to 1^a$ componente di φ $\quad y\to 2^a$ componente di φ.

$f\to$ funzione

$ds\to|\varphi'(t)|\,dt$

CURVE IN $\mathbb{R}^3$

$\varphi=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))$ Stessa definizione di curva chiusa, semplice, regolare, di classe C^1, equivalenti, versore tangente e retta tangente. Non definiamo il versore normale (ce ne sono ∞^2). Le coordinate del baricentro restano invariate.

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

$B(x_0,y_0;r)$ → cerchio centrato in (x_0,y_0) e raggio r privato della circonferenza di bordo.

INTORNO DI UN PUNTO → insieme A tale che esiste $B(x_0,y_0;r)\subset A$

INTORNO DI INFINITO → insieme A tale che esiste $r>0$ tale che $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2>r\}\subset A$

PUNTO DI FRONTIERA (o di bordo) → per ogni $r>0$ si ha $B(x_0,y_0;r)\cap A\neq\emptyset$ e $B(x_0,y_0;r)\cap C(A)\neq\emptyset$.

INSIEME CHIUSO → $\partial C\subseteq C$

INSIEME APERTO → insieme il cui complementare è chiuso

$$\boxed{\partial C(A)=\partial A}$$

INSIEME LIMITATO → esiste $R>0$ tale che $A\subset B(x_0,y_0;R)$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE → se $\forall r>0$ $(B(x_0,y_0;r)\setminus\{(x_0,y_0)\})\cap A\neq\emptyset$

PUNTO ISOLATO → se esiste $r>0$ t.c. $B(x_0,y_0;r)\cap A=\{(x_0,y_0)\}$

PUNTO DI MINIMO RELATIVO INTERNO → $\exists\, B(x_0,y_0;r)\subseteq A$ t.c. $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ $\forall(x,y)\in B(x_0,y_0;r)$

PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO → $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ $\forall(x,y)\in A$

PUNTO DI MASSIMO RELATIVO INTERNO → $\exists\, B(x_0,y_0;r)\subseteq A$ t.c. $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ $\forall(x,y)\in B(x_0,y_0;r)$

PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO → $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ $\forall(x,y)\in A$.

INSIEME DI LIVELLO K → $\{f=K\}=\{(x,y)\in A: f(x,y)=K\}$

SOTTOLIVELLO K → $\{f\leq K\}$

SOPRALIVELLO K → $\{f\geq K\}$

LIMITE AL FINITO: $\forall J \in \mathcal{U}_\ell \ \exists H \in \mathcal{U}_{(x_0,y_0)} : f(x,y) \in J, \forall (x,y) \in H \cap A \setminus \{(x_0,y_0)\}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$

LIMITE ALL'INFINITO: $\forall J \in \mathcal{U}_\ell \ \exists H \in \mathcal{U}_\infty : f(x,y) \in J, \forall (x,y) \in H \cap A$ $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = \ell$

RESTRIZIONE → funzione definita su B con valori in $\mathbb{R}$ tale che $f_{|B}(x,y) = f(x,y) \ \forall (x,y) \in B$

! Per dimostrare che $\nexists$ il limite di f in (x_0,y_0) basta trovare due restrizioni che ammettano limite diverso o una restrizione in cui il limite non esiste! Esempi di restrizioni: $\varphi(0,t)$, $\varphi(t,0)$, $\varphi(t,t)$, $\varphi(t^2,t)$ ...

Dato $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, lo sostituisco alla funzione e, con una catena di disuguaglianze cerco di ricondurmi a una funzione in ρ. Poi faccio tendere $\rho \to +\infty$ (o a un valore finito a seconda del limite da calcolare) e dimostro quindi che il limite di partenza vale $\lim_{\rho\to+\infty} g(\rho) = \ell$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS → sia f una funzione continua su un insieme chiuso e limitato C; allora f ammette minimo e massimo assoluti su C.

CAP. 3

DERIVATA DIREZIONALE → data una direzione $v=(v_1,v_2)$ e un punto $P=(x_0,y_0)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}.$$

Se le direzioni sono $(1,0)$ o $(0,1)$ si parla rispettivamente di DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A X e di DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A Y.

GRADIENTE DI f → è il vettore $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$.

PIANO TANGENTE → dato un punto $P(x_0,y_0)$

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

TEOREMA DIFFERENZIALE TOTALE → se esistono le derivate parziali di f in un intorno di (x_0,y_0) e sono continue in (x_0,y_0), f è differenziabile in (x_0,y_0).

DERIVATE PARZIALI DI ORDINE 2 → $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

PUNTO STAZIONARIO → punto in cui $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$.

MATRICE HESSIANA:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) , & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) , & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

PUNTO DI MINIMO $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$.

PUNTO DI MASSIMO $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

PUNTO DI SELLA $\rightarrow \nabla f = 0$, $\det H_f < 0$

Condizione necessaria affinché il punto (x_0, y_0) sia di massimo [minimo] relativo di f è che gli autovalori della matrice $H_f(x_0, y_0)$ siano entrambi non positivi [non negativi].

Per il teorema di Weierstrass, su un insieme E chiuso e limitato una funzione continua ammette sempre un minimo e un massimo assoluto.

Per trovare i massimi e minimi assoluti su E:

1 - calcolo massimi e minimi relativi su tutto f con $\nabla f = 0 \dots$ e guardo quali cadono in E.

2 - parametrizzo i vari "pezzi" di bordo come curve $\varphi(t)$

3 - calcolo $f(\varphi(t))$ per ogni "pezzo" di bordo

4 - calcolo $f'(\varphi(t))$ per ogni tratto e pongo $f'(\varphi(t)) = 0$

5 - trovo massimi e minimi sul tratto distinguendoli perché

- minimi: $f''(\varphi(t)) > 0$
- massimi: $f''(\varphi(t)) < 0$

6 - il massimo assoluto sarà il massimo valore assunto dalla funzione nei punti trovati in 1, 5 e il minimo sarà il minimo valore assunto dalla funzione nei punti trovati in 1, 5.

Per determinare inf e sup di $f(x,y)$, calcolo il limite a $+\infty$ e $-\infty$ di varie restrizioni di f. Se questi limiti valgono ∞, $f(x,y)$ è illimitata.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Equazioni in cui la y compare assieme alle sue prime n derivate.

PROBLEMA DI CAUCHY $\rightarrow$ determinare la soluzione dell'equazione differenziale che soddisfa le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Ogni equazione differenziale ha infinite soluzioni che dipendono dalle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A VARIABILI SEPARABILI $\rightarrow$ sono della forma $y' = a(x) \cdot g(y)$. Si risolvono:

1) trasformando y' in $\frac{dy}{dx}$ secondo la definizione

2) separando i differenziali, cioè moltiplicando per dx e dividendo per $g(y)$

3) risolvendo l'integrale $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int a(x) dx$ ricordandosi la costante c a destra.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL 1° ORDINE

Sono della forma $y' = a(x)y + b(x)$. Vi sono 2 metodi per risolverle:

$\boxed{A}$ METODO DEL FATTORE INTEGRANTE

1) Calcolo $A(x) = \int a(x)dx$ (con costante $c=0$).
2) Moltiplico ambo i membri per $e^{-A(x)}$ e sposto al 1° membro il termine con la y.
3) Mi accorgo che al 1° membro compare la derivata di $y \cdot e^{-A(x)}$
4) Integro ambo i membri e divido per $e^{-A(x)}$
5) Ottengo le soluzioni $y(x) = e^{A(x)} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx + c\right]$

$\boxed{B}$ METODO DI VARIAZIONE DI COSTANTI ARBITRARIE (poco usato)

1) Considero l'equazione omogenea associata (a variabili separabili) $y' = a(x)y$ che ha soluzioni $y_c(x) = c \cdot e^{A(x)}$
2) Cerco una soluzione dell'equazione differenziale completa della forma $v(x) = c(x) \cdot e^{A(x)}$; derivo $v(x)$ e sostituisco all'equazione di partenza che diventa $v'(x) = a(x) \cdot v(x) + b(x)$. Poi integro.
3) Ricavo $c(x) = \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx$ che vado poi a sostituire alla c del punto 1 per ritrovare la stessa formula del punto A.5.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI DI ORDINE $n>1$.

Sono della forma $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$. Per risolverle si applica sempre il METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI:

1) Trovo le n soluzioni dell'equazione omogenea associata $y^{(n)} + \dots + y = 0$. Per fare questo utilizzo il POLINOMIO CARATTERISTICO in λ dove $y^{(n)} = \lambda^n$. (es. $y'' + 3y = 0$ diventa $\lambda^2 + 3 = 0 \dots$). Si distinguono vari casi
   a. ottengo valori di λ reali e distinti: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots$
   b. ottengo valori di λ reali e coincidenti: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + c_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \dots$
   c. ottengo valori di λ complessi e distinti del tipo $\lambda = \alpha \pm i\beta$: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x) \dots$
   d. ottengo valori di λ complessi e coincidenti del tipo $\lambda = \alpha \pm i\beta$: le soluzioni dell'omogenea saranno del tipo $y_0(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} sen(\beta x) + c_3 x e^{\alpha x}\cos(\beta x) + \dots$

N.B. coincidenti significa molteplicità >1; ad esempio $(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda = 1$ molteplicità 2.

N.B. $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ va sempre in coppia con $e^{\alpha x} sen(\beta x)$.

Ovviamente, i casi a, b, c, d si possono presentare contemporaneamente e, nel caso, sommo le varie soluzioni.

2) Cerco una soluzione dell'equazione completa

a. a seconda della forma di $f(x)$ considero $v(x)$ diverse:

i) se $f(x)$ è della forma $e^{\mu x}$ considero $v(x) = ke^{\mu x}$

ii) se $f(x)$ è della forma $x^n + \ldots + c$ considero $v(x) = ax^n + \ldots + c$ generico polinomio di grado $n \to f(x)$

iii) se $f(x)$ è del tipo $a\cos\beta x$ o $b\,\mathrm{sen}\,\beta x$ considero $v(x) = a\,\mathrm{sen}\,\beta x + b\cos\beta x$

iv) se $f(x)$ è del tipo $P(x) \cdot e^{\mu x}$ considero $v(x) = (ax^n + \ldots + c) \cdot e^{\mu x}$

N.B. se $f(x)$ è somma di vari casi, considero i casi separati e poi sommo le soluzioni (sovrapposizione delle soluzioni)

N.B. se $v(x)$ è soluzione dell'omogenea associata, allora moltiplico per x finché non trovo $v(x)$ indipendente dalle soluzioni dell'omogenea associata

b. calcolo le prime n derivate di $v(x)$

c. sostituisco all'equazione di partenza

d. trovo i valori di $a, b, c, \ldots, k, \ldots$ uguagliando i coefficienti dei vari termini (es. se ho $x^2(a+2b) + x(b+c) + a + b = 3x^2$, ottengo $\begin{cases} a+2b=3 \\ b+c=0 \\ a+b=0 \end{cases}$)

e. sostituisco a $v(x)$ i valori trovati e trovo la soluzione particolare y_P.

3) La soluzione generale dell'equazione differenziale sarà la somma della soluzione dell'omogenea e di quella particolare: $y_G(x) = y_0(x) + y_P(x)$.

MISURA E INTEGRAZIONE

Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, la misura di E è data da $m(E) = \int_a^b f(x)\,dx$. Se E e F sono insiemi misurabili e $E \cap F = \emptyset$, allora

$m(E \cup F) = m(E) + m(F)$.

Se E è un insieme di $\mathbb{R}^2$, la sua misura $m(E) = \int_E 1\,dx\,dy$. Inoltre

$m(E \cup F) = \int_E 1\,dx\,dy + \int_F 1\,dx\,dy$ se $E \cap F = \emptyset$ e $m(E \setminus F) = \int_E 1\,dx\,dy - \int_F 1\,dx\,dy$.

DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE X $\to$ se esistono due funzioni continue α e $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $\alpha(x) \leq \beta(x)$ $\forall x \in [a,b]$ tali che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$

DOMINIO NORMALE RISPETTO ALL'ASSE Y $\to$ se esistono due funzioni continue $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ con $\gamma(y) \leq \delta(y)$ $\forall y \in [c,d]$ tali che $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(y) \leq x \leq \delta(y),\ c \leq y \leq d\}$

Figure quali i quadrati e i triangoli sono normali rispetto a entrambi gli assi.

TEOREMA DI RIDUZIONE: Sia $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su Ω misurabile. Allora

i) se $A \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse x, cioè $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, allora $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy$.

ii) se $B \subseteq \Omega$ è un dominio normale rispetto all'asse y, cioè $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$, allora $\int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx$.

BARICENTRO (G)

Sia ρ la densità di massa di un corpo C. Allora le coordinate di $G(x_G, y_G)$ sono:

$$x_G = \frac{\int_G x \cdot \rho(x,y)\,dx\,dy}{\int_G \rho(x,y)\,dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\int_G y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\int_G y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}$$

G = baricentro della regione di spazio occupata da C.

Nel caso in cui ρ sia costante, il BARICENTRO si dice GEOMETRICO e:

$$x_G = \frac{1}{m(G)} \int_G x\,dx\,dy \qquad y_G = \frac{1}{m(G)} \int_G y\,dx\,dy$$

con $m(G) = \int_G 1\,dx\,dy$

Se E e F sono insiemi misurabili tali che $E \cap F = \emptyset$, allora il baricentro di $C = E \cup F$

$$x_C = \frac{m(E) \cdot x_E + m(F) \cdot x_F}{m(E) + m(F)} \qquad y_C = \frac{m(E) \cdot y_E + m(F) \cdot y_F}{m(E) + m(F)}$$

con (x_E, y_E) coordinate del baricentro di E e (x_F, y_F) coordinate del baricentro di F.

Se E e F sono insiemi misurabili tali che $E \subset F$, allora le coordinate di $C = E \setminus F$ sono

$$x_C = \frac{m(F)x_F - m(E)x_E}{m(F) - m(E)} \qquad y_C = \frac{m(F)y_F - m(E)x_E}{m(F) - m(E)}$$

Se l'insieme C possiede un asse di simmetria, il baricentro appartiene all'asse.
Se l'insieme C è convesso ed ammette punti interni, il baricentro $\in C$.

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\phi(u,v)) \cdot |\det J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

dove ϕ^{-1} è una funzione opportuna che esprime u in funzione di x e y e v in funzione di x e y, mentre ϕ è la funzione che esprime x e y in funzione di u e v; lo Jacobiano di ϕ è la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \phi = \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \qquad \phi^{-1} = \begin{cases} u = \dots \\ v = \dots \end{cases}$$

Nel caso J sia difficile da calcolare, si può calcolare il determinante della matrice inversa $J_\phi^{-1}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1^{-1}}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2^{-1}}{\partial y} \end{vmatrix}$ e $\det J_\phi = \frac{1}{\det J_\phi^{-1}}$.

Per scegliere la funzione ϕ cerco nella definizione dell'insieme E (dominio) due intervalli in cui variano x e y legate e pongo u e v uguali alla espressione di questi intervalli. Ad esempio, sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 1, 0 \le 2x-y \le 2\}$ pongo $u = x+y$ (u varia tra 0 e 1) e $v = 2x-y$ (v varia da 0 a 2).

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE POLARI

La trasformazione ϕ è sempre $\phi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ e il $|\det J_\phi(u,v)|$ è sempre ρ.

Per determinare gli intervalli entro cui variano ρ e θ, disegno E e ricordando che ρ è il modulo del vettore che parte dall'origine e arriva al bordo di E e θ è l'angolo che forma con l'asse x trovo gli intervalli. Quando vado a sostituire le coordinate polari alla funzione mi ricordo che $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ e che $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$. Poi mi ricordo di moltiplicare per ρ.

INTEGRAZIONE IN $\mathbb{R}^3$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER STRATI

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su Ω e $E \subseteq \Omega$ un dominio semplice rispetto all'asse x, ovvero $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b, (y,z) \in E_x\}$. Allora

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{E_x} f(x,y,z)\,dy\,dz$$

TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER FILI

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su Ω e $E \subset \Omega$ un dominio normale rispetto al piano xy, ovvero $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Pi_{xy}(E), a(x,y) \le z \le b(x,y)\}$.

Allora $$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Pi_{xy}(E)} dx\,dy \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Π_{xy} è la proiezione di E sul piano XY (guardo dall'alto).

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE SFERICHE

$$H \begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad \theta \in \,]0, 2\pi[\quad \varphi \in \,]0, \pi[\quad \det J_\phi = \rho^2\,\text{sen}\,\varphi$$

La sfera si trasforma in un parallelepipedo

CALCOLO DEL VOLUME DI UN SOLIDO B

$$V(B) = m(B) = \int_B 1\,dx\,dy\,dz.$$

TRASFORMAZIONE IN COORDINATE CILINDRICHE

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad \theta \in]0, 2\pi[\quad |\det J_\Phi(\rho,\theta,z)| = \rho$$

COSE DA RICORDARE

$$V_{CONO} = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} \qquad V_{PARABOLOIDE} = \frac{1}{2} V_{\substack{CILINDRO \\ CIRCOSCRITTO}} \qquad V_{CILINDRO} = \pi r^2 \cdot h.$$

BARICENTRO DI UN TRIANGOLO ABC $\quad x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \qquad y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

SUPERFICI NOTEVOLI

PIANO $\quad z = ax + by + c$

$a = 0 \Rightarrow z //$ asse x $\qquad a = b = 0 \Rightarrow z // xy$

$b = 0 \Rightarrow z //$ asse y

$c = 0 \Rightarrow z$ passa per $O(0,0)$

SFERA $\quad C(x_0, y_0, z_0) \quad (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$

SEMISFERA CON $z \geq 0 \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \qquad$ CON $z \leq 0 \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

ELLISSOIDE $\quad C(x_0, y_0, z_0) \quad \dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} + \dfrac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1$

CONO $\quad V(0,0,0) \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad$ VERSO L'ALTO (V)

$z = a\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} + k \qquad V(x_0, y_0, k) \quad a =$ apertura

PARABOLOIDE CIRCOLARE $\quad z = x^2 + y^2 \quad$ VERSO L'ALTO ($\cup$)

$z = a\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] + k \qquad V(x_0, y_0, k) \quad a =$ apertura

PARABOLOIDE ELLITTICO $\quad z = ax^2 + by^2 \qquad a > 0, b > 0 \; (\cup)$

$z = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2 + k \qquad V(x_0, y_0, k) \quad a < 0, b < 0 \; (\cap)$

CILINDRO $\quad x^2 + y^2 = k$